FORMULA DELLO SDOPPIAMENTO

$y = ax^2 + bx + c$ parabola $\wp$

$P(x_0, y_0)$ punto $\in \wp$

- scrivo fascio di rette per P: $y - y_0 = m(x - x_0)$
- impongo tangenza:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = m(x - x_0) + y_0 \end{cases} \Rightarrow m(x - x_0) + y_0 = ax^2 + bx + c$$

$$ax^2 + (b - m)x + mx_0 - y_0 + c = 0$$

$$\Downarrow$$

$\Delta = 0$ condizione di tangenza

vuol dire che le due soluzioni dell'equazioni devono essere coincidenti e devono coincidere con l'ascissa del punto P (x_0). Ora sapendo che la somma delle radici di una equazione di secondo grado del tipo $ax^2 + bx + c$ con radici x_1 e x_2 è $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ otteniamo nel nostro caso che $x_0 + x_0 = -\frac{b - m}{a} \Rightarrow 2x_0 = -\frac{b - m}{a}$ quindi $m = 2ax_0 + b$

pertanto l'equazione della retta tangente alla $\wp$ e passante per P è:

$$y - y_0 = (2ax_0 + b)(x - x_0) \Rightarrow \boxed{y - y_0 = 2axx_0 + bx - 2ax_0^2 - bx_0}$$

Siccome $P \in \wp$ allora $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ che moltiplicata per 2 diventa $\boxed{2y_0 = 2ax_0^2 + 2bx_0 + 2c}$ Ora sommo membro a membro le due equazioni cerchiate in rosso:

$$y + y_0 = 2ax_0x + bx + bx_0 + 2c$$

divido per 2 e ho:

$$\boxed{\frac{y+y_0}{2} = ax_0x + b\,\frac{x+x_0}{2} + c}$$